Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 2
Séance 1
Interpolation linéaire et quadratique
Prise en main de matplotlib

Table des matières

I. Introduction *2*
II. Interpolation linéaire *2*
III. Interpolation quadratique ou parabolique *2*
IV. Algorithme de Hörner *3*
V. TP 1 : Prise en main de matplotlib et Interpolation linéaire et quadratique *4*

Cours de B Moreau

I. Introduction

L'interpolation est une méthode permettant de construire de nouveaux points de données au sein de l'intervalle d'un ensemble discret de points de données connus. Les deux méthodes d'interpolation les plus courantes sont l'interpolation linéaire et l'interpolation parabolique (ou quadratique).
On parle d'interpolation quand on est entre les points et d'extrapolation lorsque l'on est en dehors des points.

II. Interpolation linéaire

L'interpolation linéaire est la méthode la plus simple d'interpolation. Elle consiste à utiliser pour cela la fonction affine (de la forme $f(x) = m.x + p$) passant par les deux points déterminés.

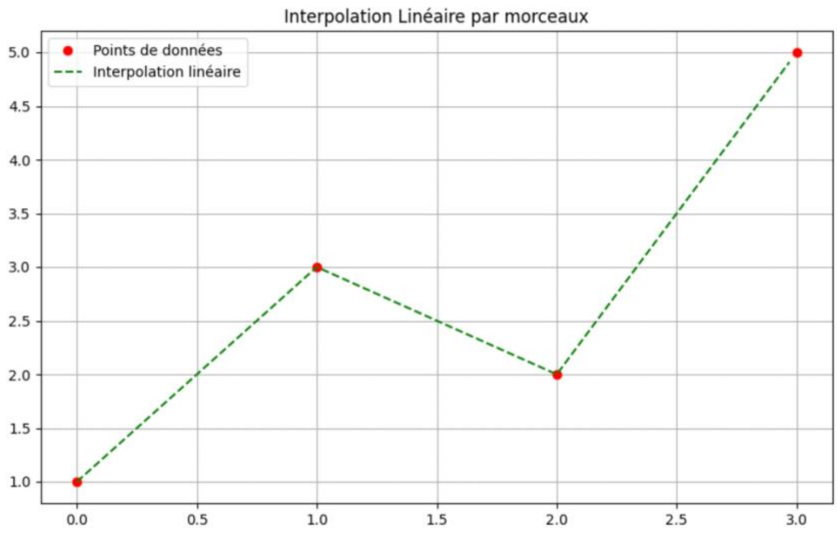
Formule de l'interpolation linéaire :
Soit deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1). La valeur interpolée y pour un point x se trouvant entre x_0 et x_1 est donnée par :

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Dans le cas de plusieurs points non alignés, il est possible de faire une interpolation linéaire composée de segments de droites :
Soient $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ des points de données avec $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Pour interpoler une valeur y pour un point x tel que $x_i \leq x < x_{i+1}$, on utilise la formule :

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

Cours de B Moreau



Il faut être conscient des limites de cette méthode, qui a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre.
L'interpolation linéaire est souvent utilisée pour des approximations rapides lorsque les données sont suffisamment proches pour que les segments linéaires soient une bonne approximation.

III. Interpolation quadratique ou parabolique

L'interpolation parabolique utilise une parabole pour estimer les valeurs intermédiaires. Elle est plus précise que l'interpolation linéaire, surtout si les points de données présentent une courbure significative.

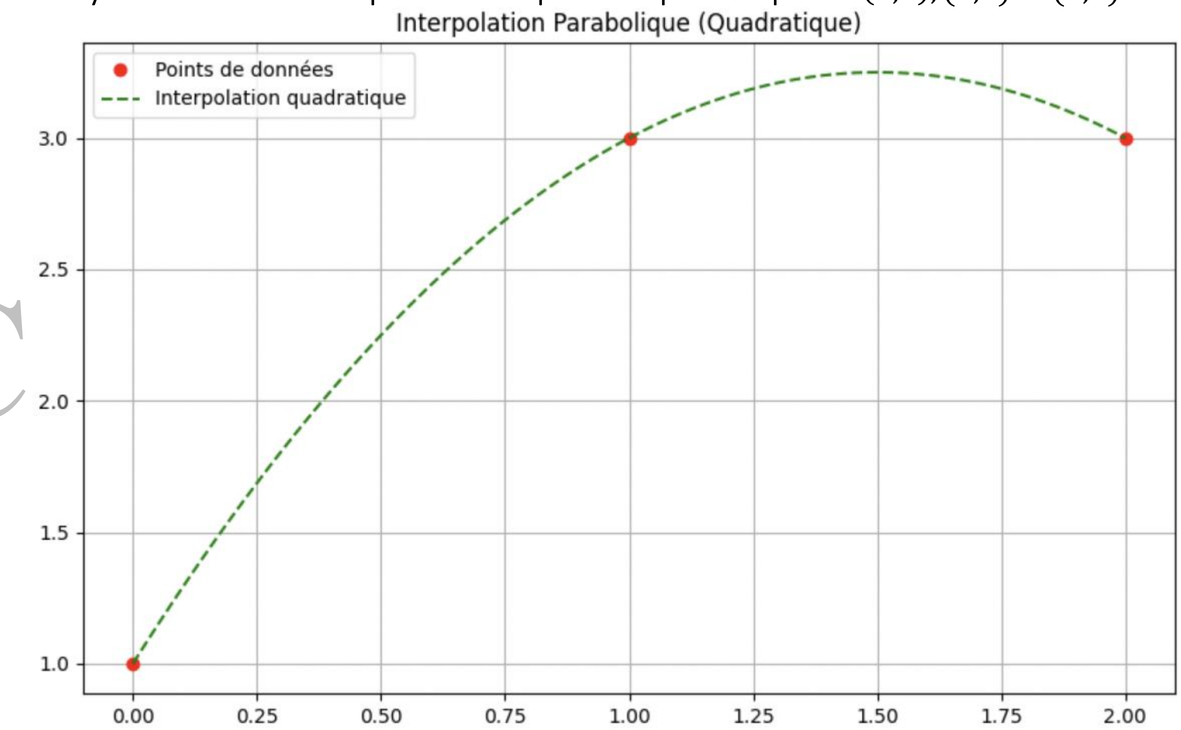
Méthode de l'interpolation quadratique :
Soit trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ et (x_2, y_2). La parabole passant par ces trois points peut être exprimée comme :

$$y = ax^2 + bx + c$$

Pour déterminer les coefficients a, b, et c, on résout le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y_0 = a{x_0}^2 + bx_0 + c \\ y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c \\ y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Exercice 1 :
Résoudre le système et trouver l'équation de la parabole pour les points $(0,1), (1,3)$ et $(2,3)$.



Réponse exercice 1 :

$$y = -x^2 + 3x + 1$$

IV. Algorithme de Hörner

L'algorithme de Hörner est une méthode efficace pour évaluer les polynômes et leurs dérivées. Il est particulièrement utile pour minimiser le nombre de multiplications nécessaires, rendant l'évaluation de polynômes plus rapide et plus précise, surtout en présence de calculs en virgule flottante.

La méthode dite de la factorisation de Hörner (qui n'est pas réellement une factorisation au sens usuel) consiste à écrire le polynôme $P(X)$ sous la forme $P_1(X) + a_0$ et à répéter cette opération pour le polynôme $P_1(X)$ de degré $n-1$ et ainsi de suite jusqu'au polynôme constant $P_n(X) = a_n$ qui achève le processus.
Supposons que l'on souhaite évaluer le polynôme $P(x)$ de degré n :

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \\ &= (a_n X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1)X + a_0 \\ &\vdots \\ &= ((\dots(a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \cdots a_2)X + a_1)X + a_0 \end{aligned}$$

Comparaison :

Méthode classique	Algorithme de Hörner
$P(x) = 2X^3 - 6X^2 + 2X - 2$ pour $X = 3$	
1. Calculer $2.3^3 = 54$ 2. Calculer $-6.3^2 = -54$ 3. Calculer $2.3 = 6$ 4. Ajouter tous les termes : $54 - 54 + 6 - 2 = 4$	1. $P(X) = (((2X-6)X+2)X-2)$ À $X = 3$: $P(3) = (((2\cdot 3-6)\cdot 3+2)\cdot 3-2)$ 2. $P(3) = (((6-6)\cdot 3+2)\cdot 3-2)$ 3. $P(3) = ((0\cdot 3+2)\cdot 3-2)$ 4. $P(3) = (2\cdot 3-2)$ 5. $P(3) = 6-2 = 4$

V. TP 1 : Prise en main de matplotlib et Interpolation linéaire et quadratique

1. Ouvrir le fichier `L2-TP1_intro_matplotlib` et comprendre les lignes de codes pour pouvoir les utiliser.

Cours de B Moreau

2. Écrire une fonction python `interpolation_lineaire` qui prendra comme arguments les coordonnées de 2 points et retournera les valeurs de m et p de l'interpolation linéaire.
Tracer cette interpolation avec les points.

3. Faire de même, mais avec une interpolation linéaire par morceaux. Vous pourrez utiliser la fonction écrite dans le 2.

4. Écrire une fonction python `interpolation_quadratique` qui prendra comme arguments les coordonnées de 3 points et retournera les valeurs de a, b et c qui correspondent à la parabole d'interpolation.
Tracer la parabole et les points.

Point Python :
À ce moment de l'année, pour résoudre un système de *n* équations a *n* inconnues que l'on peut mettre sous forme matricielle $A \times X = B$, nous utiliserons ce code python :

```
a, b, c = np.linalg.solve(A, B)
```

Pour un système de 3 équations à 3 inconnues.
Plus tard dans l'année, nous apprendrons à coder cette résolution.

Exemple :
Pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y = -1 \\ -x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

On entrera le code suivant :

```
A = np.array([
        [2, 3, -1],
        [1, 2, 0],
        [-1, -2, 1]
    ])
    B = np.array([2, -1, 5])

    # Résoudre le système pour trouver x, y et z
    x, y, z = np.linalg.solve(A, B)
```

5. Dans le cadre d'un projet sur les énergies renouvelables, une équipe d'ingénieurs teste l'efficacité d'une turbine éolienne en fonction de la vitesse de rotation de ses pales (en tours par minute, tr/min). L'efficacité énergétique E (en pourcentage) est mesurée à différentes vitesses de rotation v lors d'un test en laboratoire.
Votre objectif est d'utiliser l'interpolation quadratique pour modéliser ces données, puis de déterminer la vitesse de rotation optimale qui maximise l'efficacité.
Données expérimentales :
Les mesures suivantes ont été obtenues :

- À $v = 20 tr/min : E = 75\%$
- À $v = 30\ tr/min :\ E = 84\%$
- À $v = 40\ tr/min :\ E = 79\%$

a. Utilisez l'interpolation quadratique pour déterminer une fonction de la forme $E(v) = av^2 + bv + c$ qui passe par ces trois points.
b. Calculez (à la main) les coefficients a, b et c en résolvant le système d'équations obtenu.
c. Déterminez la vitesse de rotation $vmax$ qui maximise l'efficacité E.
d. Calculez l'efficacité maximale $Emax$ correspondante.
e. Vérifier les valeurs obtenues à l'aide de la fonction python `interpolation_quadratique` trouvée dans la question 4 et tracer le graphique illustrant l'efficacité en fonction de la vitesse de rotation.
f. Bonus : Modifier votre fonction Python pour quelle retourne aussi l'extremum et la valeur min ou max obtenue en précisant sa nature.

5. Écrire l'algorithme de Hörner sous Python et le tester avec l'exemple du cours.

Cours de B Moreau

Correction du 4.

Étape 1 : Modélisation par interpolation quadratique

Nous cherchons une fonction quadratique $E(v) = av^2 + bv + c$ qui passe par les points donnés :

- $(20{,}75)$: $75 = a(20)^2 + b(20) + c$
- $(30{,}84)$: $84 = a(30)^2 + b(30) + c$
- $(40{,}79)$: $79 = a(40)^2 + b(40) + c$

Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 75 \\ 900a + 30b + c = 84 \\ 1600a + 40b + c = 79 \end{cases}$$

Étape 2 : Résolution du système

$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 75 \\ 500a + 10b = 9 \\ 1200a + 20b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 400a + 20b + c = 75 \\ 50a + b = 0{,}9 \\ 60a + b = 0{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 400a + 20b + c = 75 \\ 50a + b = 0{,}9 \\ 10a = -0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 75 - 400a - 20b \\ b = 0{,}9 - 50a \\ a = -0{,}07 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 75 - 400a - 20b \\ b = 0{,}9 - 50 \times (-0{,}07) = 4{,}4 \\ a = -0{,}07 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 75 - 400 \times (-0{,}07) - 20 \times 4{,}4 = 15 \\ b = 0{,}9 - 50 \times (-0{,}07) = 4{,}4 \\ a = -0{,}07 \end{cases}$$

On a ainsi :

$$E(v) = -0{,}07v^2 + 4{,}4v + 15$$

Étape 3 : Détermination du maximum

Maximum pour $v = -\frac{4{,}4}{2\times(-0{,}07)} \approx 31{,}43\ tr/min$, avec $E(31{,}43) \approx 84{,}14\%$

La turbine atteint son efficacité maximale à environ 31,43 tr/min, avec une efficacité de 84,14 %.

Cours de B Moreau